ÁREAS Y VOLÚMENES **VECTORES 4**

1. Halla el valor de m para que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ (m,-1,1) y $\vec{b}$ (-1,-1,0), sea de 5 u ^{2}. Calcula para ese valor de m el área del paralelogramo formado por los vectores $2\vec{a}$ y $2\vec{b}$.

2. Halla el/ los valores de m para que el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores $\vec{u}(0,m,3)$, $\vec{v}(0,2,1)$ y $\vec{w}(m,1,0)$ sea 15 u^3.

3. Halla el área del triángulo formado por $A(1,1,3)$, $B(2,2,-1)$ y $C(0,1,0)$

4. Halla el área de un paralelogramo determinado por $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$ siendo: $\vec{u}(1,1,3)$, $\vec{v}(2,2,-1)$ y $\vec{w}(0,1,0)$

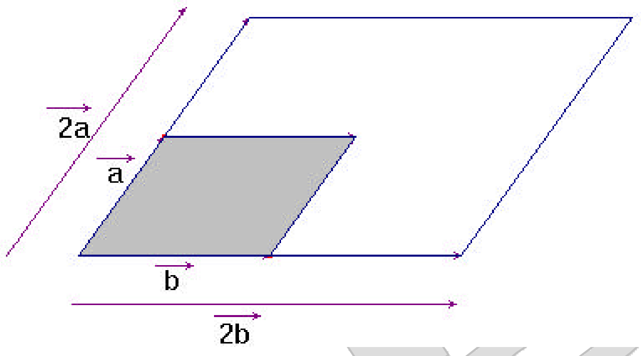
5. Determinar el volumen de un paralelepípedo en el que dos vértices opuestos son el origen y el punto (1,2,3) y sus lados son paralelos a los ejes coordenados.

SOLUCIONES A LA FICHA **VECTORES 4**

1. El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ (m,-1,1) y $\vec{b}$ (-1,-1,0) se calcula como $\left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right|$, calcularemos primero el producto vectorial y después el módulo.

$$\vec{a}\ x\ \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,-1,-m-1) \Rightarrow \left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| =$$

$$= \sqrt{1+1+(m+1)^2} \Rightarrow m^2 + 2m + 3 = 25 \Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{23}$$



Para esos y otros valores de m, el área del paralelogramo formado por los vectores $2\,\vec{a}$ y $2\,\vec{b}$ es cuatro veces el área del primero, tal como se ve en la figura, es decir, $\left|2\vec{a}\ x\ 2\vec{b}\right| = 20\ u^2$

---

2. El volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores $\vec{u}(0,m,3)$, $\vec{v}(0,2,1)$ y $\vec{w}(m,1,0)$ se calcula como $\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right| = \left\| \begin{matrix} 0 & m & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \left|m\cdot(m-6)\right| = 15 \Rightarrow \begin{cases} m\cdot(m-6) = 15 \\ m\cdot(m-6) = -15 \end{cases}$, de la primera deducimos que $m = 3 \pm 2\sqrt{6}$, mientras que en la segunda ecuación no tenemos solución.

---

3. $A(1,1,3)$, $B(2,2,-1)$ y $C(0,1,0)$

El área del triángulo formado por esos puntos se calcula como la mitad del área del paralelogramo formado por $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, es decir Área= $\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\,x\,\vec{AC}\right|$, $\vec{AB} = (1,1,-4)$ y $\vec{AC}(-1,0,-3) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\,x\,\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)\right| = \frac{1}{2}\left|(-3,7,1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+49+1} = \frac{\sqrt{59}}{2}\,u^2$$

4. El área de un paralelogramo determinado por $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$ lo calculamos como $\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)x\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\right|$, calcularemos por separado cada producto: siendo: $\vec{u}(1,1,3)$, $\vec{v}(2,2,-1)$ y $\vec{w}(0,1,0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-7,7,0),\qquad \vec{u}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=(-3,0,1)\Rightarrow$$

$$\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)x\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\right|=\left|\left(\begin{vmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -7\\ 1 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-7 & 7\\ -3 & 0\end{vmatrix}\right)\right|=\left|(7,7,21)\right|=\sqrt{49+49+121}=\sqrt{219}=14'8\,u^2$$

---

5. El volumen de este paralelepípedo, como se puede ver en la figura es 1· 2 3 = 6 u^3., pero si queremos usar el producto mixto de los tres vectores lo hacemos de la siguiente manera:

$$V=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\left|\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right|=6u^3.$$